View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Hal-Diderot

Propriétés de convergence dans les structures d'erreur

Dominique Malicet, Guillaume Poly

To cite this version:

Dominique Malicet, Guillaume Poly. Propriétés de convergence dans les structures d'erreur. 2011. <hal-00608007>

HAL Id: hal-00608007

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00608007

Submitted on 12 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propriétés de convergence dans les structures d'erreur.

Dominique Malicet, Guillaume Poly

21 juin 2011

Introduction

La propriété de densité de l'énergie image (EID) affirme que dans une structure d'erreur donnée S, un p-uplet de variables dans le domaine $\mathbb{D}$ dont la matrice carré du champ est presque sûrement non dégénérée, admet une loi absoluement continue par rapport à la mesure de Lebesgue de dimension p. Cette propriété a été conjecturée vraie dans toutes les structures d'erreur par Nicolas Bouleau et Francis Hirsch en 1986. Démontrée dans tous les cas particuliers existants, elle permet d'établir des critères sous lesquels les lois de solutions d'équations différentielles stochastiques éventuellement avec sauts, admettent des densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Le critère (EID) ne repose pas réellement sur la théorie du calcul de Malliavin car il n'y a pas besoin d'effectuer des intégrations par parties pour obtenir la régularité des lois. Il s'agit plutôt d'une propriété très fine de théorie géométrique de la mesure.

Le cas des variables aléatoires à valeurs réelles (p=1) a été prouvé en toute généralité, ceci peut être vu dans [1]. Quelques années plus tard, la conjecture est démontrée dans le cas particulier de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener, voir [5]. Alors que la théorie du calcul de Malliavin avait déjà permis d'établir des critères sous lesquels les lois de solutions d'équations différentielles stochastiques admettaient des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, ce résultat permet d'abaisser la régularité des coefficients fonctionnels à Lipschitzien. A ce jour, ces critères restent les plus généraux.
Le cas de l'espace de Poisson a été traité par Agnès Coquio dans un cas particulier, voir [7], il s'agit du cas particulier où la mesure d'intensité est une loi uniforme sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Très récemment, une nouvelle

méthode dite "de la particule prêtée" permet d'établir des résultats très généraux pour des structures de Dirichlet sur l'espace de Poisson. On pourra consulter [4] pour une introduction à cette théorie ainsi que [3] pour l'application aux équations différentielles stochastiques. Toutes ces démonstrations reposent en partie sur la formule de la coaire de Federer.

L'objectif de ce travail est de mettre en évidence l'existence d'un renforcement de la propriété (EID), que l'on peut voir comme une version quantitative de la propriété (EID). Il s'agit d'établir que la convergence dans le domaine $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ de variables aléatoires entraîne la convergence en variation totale des lois. Nous établissons cette propriété en toute généralité pour le cas des variables aléatoires à valeurs réelles et étudions les liens avec la propriété (EID) ainsi que certaines propriété générales. Cela permet par exemple, d'établir que les lois de variables non dégénérées sont de Rajchman et possèdent donc un "gros" support. Bien entendu, cela va dans le sens de la conjecture (EID). Dans un second temps nous démontrons le cas particulier de la structure de Dirichlet $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$ ainsi que le cas de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Notons que cela permet de donner une démonstration alternative de (EID) sur ces espaces, ne reposant aucunement sur la formule de la coaire.

1 Définitions et propriétés générales

Soit une structure d'erreur $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$. Introduisons deux définitions, dont nous étudions les liens ultérieurement.

Définition 1. *(Energy image density)*

On dit que S satisfait la propriété (EID), si pour tout p-uplet $X = (X_1, \cdots, X_p)$ de variables aléatoires dans $\mathbb{D}$:

$$X_*(\det(\Gamma[X_i, X_j]_{i,j\le p})\, d\mathbb{P}) << d\lambda_p.$$

Définition 2. *(Strong energy image density)*

On dit que S satisfait la propriété (SEID), si pour tout p-uplet $X = (X_1, \cdots, X_p)$ de $\mathbb{D}^p$, pour toute suite de $\mathbb{D}^p$ $X_n = (X_1^{(n)}, \cdots, X_p^{(n)})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(n)}\|_{\mathbb{D}} = 0$, puis pour toute suite ϕ_n de fonctions de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ avec $\|\phi_n\|_\infty \le 1$, on a la propriété suivante.

$$\forall Z \in L^2(\mathbb{P}), \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\, \chi_{\{\det(\Gamma[X_i,X_j]_{i,j\le p})\neq 0\}}\, (\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = 0.$$

Avant de rentrer dans le détail des significations des deux définitions précédentes, introduisons brièvement quelques notations.

- $D : \mathbb{D} \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{H})$ est un gradient tel que $\Gamma[X] =< DX, DX >_{\mathcal{H}}$. (Ici $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.)
- δ est l'opérateur adjoint du gradient.
- P_t est le semi-groupe engendré par la forme de Dirichlet $\mathcal{E}[X] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\Gamma[X]\}$.
- A est le générateur associé au semi-groupe P_t.

La proposition suivante permet de clarifier la définition de la propriété (SEID).

Proposition 1. *(Convergence en variation totale et SEID)*

Supposons que S satisfait la propriété (SEID). Soient $X = (X_1, \cdots, X_p)$ et $X_n = (X_1^{(n)}, \cdots, X_p^{(n)})$ des éléments de $\mathbb{D}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(n)}\|_{\mathbb{D}} = 0$ et $\mathbb{P}$-ps, $\det(\Gamma[X_i, X_j]_{i,j\leq p}) > 0$. On a alors la propriété suivante de convergence en variation totale :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\phi\|_{\infty\leq 1}} \mathbb{E}(\phi(X_n) - \phi(X)) = 0.$$

Démonstration. Pour tout entier n, il existe ϕ_n continue telle que $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$ et $|\sup_{\|\phi\|_{\infty\leq 1}} \mathbb{E}(\phi(X_n) - \phi(X)) - \mathbb{E}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))| \leq \dfrac{1}{n}$. Il suffit alors d'appliquer la propriété (SEID) à la suite ϕ_n et en prenant également $Z = 1$ pour obtenir le résultat souhaité. Précisons que par hypothèse, la variable X de $\mathbb{D}^p$ étant presque sûrement non dégénérée, il découle que presque sûrement, $\chi_{\{\det(\Gamma[X_i,X_j]_{i,j\leq p})\neq 0\}} = 1$. $\square$

Remarquons que la condition de non dégénérescence de la matrice Γ de la limite est nécessaire. Prenons l'exemple de la structure de Dirichlet suivante : $S = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, H^1([0,1]), \Gamma[f] = (f')^2)$. On définit alors la fonction f valant 0 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Puis on définit $f_n = f + \frac{1}{n}$. On a alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{H^1} = 0$ mais on n'a pas la convergence en variation totale de $(f_n)_* dx$ vers $f_* dx$. Il suffit de considérer le borélien $A = \{0\}$, on a $\mathbb{E}\big\{\chi_A(f)\big\} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}\big\{\chi_A(f_n)\big\} = 0$.

La proposition suivante explique en quoi, la propriété (SEID) est un renforcement de la propriété (EID).

Proposition 2. *(SEID)$\Rightarrow$(EID)*

Si une structure d'erreur satisfait la propriété (SEID) alors elle satisfait la propriété (EID).

Démonstration.

La preuve se décline en trois étapes.
- Etablir un résultat de densité dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$.
- Vérifier que la propriété (EID) est satisfaite pour cette classe de variables plus "régulières".
- Utiliser (SEID) pour transférer (EID) aux variables de $\mathbb{D}$, par densité.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1. *Densité de $\mathbb{D}^{2,2}$ pour $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$.*

Les variables aléatoires telles que $X \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[X] \in \mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. (Cet espace sera désigné par $\mathbb{D}^{2,2}$ par analogie avec les espaces de Sobolev).

Démonstration. Utilisons pour démontrer ce résultat le semi-groupe de contraction P_t. On sait que $P_t(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et de plus $\mathcal{E}[P_tX, P_tX] \leq \mathcal{E}[X, X]$. En outre, $\|P_tX\|_{L^2(\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^2(\mathbb{P})}$. Ceci permet d'affirmer que P_t induit un semi-groupe à contraction dans l'espace de Banach $\mathbb{D}$. Ce semi-goupe, appelons le Q_t, possède un générateur B qui est défini sur un domaine $\mathcal{D}(B)$ dense dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. En outre $\|\cdot\|_{\mathbb{D}} \geq \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}$, ainsi $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Enfin, pour tout X dans $\mathcal{D}(B)$, on a $B[X] = A[X] \in \mathbb{D}$. Enfin, vu que $A[X] \in \mathbb{D}$, on en déduit que $\Gamma[X] \in \mathbb{D}$ (car $2\Gamma[X] = A[X^2] - 2XA[X]$). $\square$

Donnons nous $X = (X_1, \cdots, X_p)$ un p-uplet de variables dans le domaine $\mathbb{D}$. Par le lemme précédent, on se donne également $X_n = (X_1^{(n)}, \cdots, X_p^{(n)})$ des éléments de $\mathbb{D}^{2,2}$ qui convergent vers X pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. L'idée principale est que les variables dans $\mathbb{D}^{2,2}$ sont plus "régulières" que les variables dans $\mathbb{D}$ et satisfont naturellement la propriété (EID) par le biais d'une intégration par parties.
Fixons une fonction test ψ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, un réel $\epsilon > 0$, et un indice de dérivation i entre 1 et p, on a les formules suivantes :

$$D(\psi(X_n)) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i \psi(X_n) D X_i^{(n)},$$

$$\Gamma[\psi(X_n), X_j^{(n)}] = \sum_{i=1}^{p} \partial_i \psi(X_n) \Gamma[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}],$$

$$\partial_i \psi(X_n) = \sum_{j=1}^{p} \Gamma[\psi(X_n), X_j^{(n)}] \Gamma[X_n]^{-1}_{i,j}.$$

La formule précédente n'est vraie que là où $\det \Gamma[X_n] \neq 0$, ainsi :

$$\tfrac{\det \Gamma[X_n]}{\det \Gamma[X_n]+\epsilon} \partial_i \psi(X_n) = \sum_{j=1}^{p} \Gamma[\psi(X_n), X_j^{(n)}] \frac{\mathrm{Com}(X_n)_{i,j}}{\det \Gamma[X_n] + \epsilon}.$$

Enfin, on remarque que comme les variables X_n sont dans $\mathbb{D}^{2,2}$, le terme $Z_n = \frac{\mathrm{Com}(X_n)_{i,j}}{\det \Gamma[X_n]+\epsilon}$ est dans $\mathbb{D}$. On a donc la formule d'intégration par parties $\mathbb{E}\{\Gamma[\psi(X_n), X_j^{(n)}] Z_n\} = \mathbb{E}\{Z_n \psi(X_n) A[X_j^{(n)}]\} - \mathbb{E}\{\psi(X_n) \Gamma[Z_n, X_j^{(n)}]\}$.
On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de la fonction test choisie ψ, telle que

$$|\mathbb{E}\{\frac{\det \Gamma[X_n]}{\det \Gamma[X_n] + \epsilon} \nabla \psi(X_n)\}| \leq C \|\psi\|_\infty.$$

Ceci assure que $X_{n\,*}(\frac{\det \Gamma[X_n]}{\det \Gamma[X_n]+\epsilon} d\mathbb{P}) << \lambda_p$. Fixons enfin un borélien A négligeable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$.

$$\mathbb{E}\{\frac{\det \Gamma[X_n]}{\det \Gamma[X_n] + \epsilon} \chi_A(\psi(X_n))\} = 0.$$

Puis en faisant tendre ϵ vers 0,

$$\mathbb{E}\{\chi_{\{\det \Gamma[X_n] > 0\}} \chi_A(\psi(X_n))\} = 0.$$

Passons à la dernière étape du raisonnement. A renumérotation près, on peut supposer que $\lim_{n \to \infty} \det \Gamma[X_n] = \det \Gamma[X]$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un ensemble mesurable B tel que la convergence précédente soit uniforme sur B, avec $\mathbb{P}(B) \geq 1 - \epsilon$.

D'une part,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\det\Gamma[X_n]\chi_B\,\chi_A(\psi(X_n))\} - \mathbb{E}\{\det\Gamma[X]\chi_B\,\chi_A(\psi(X_n))\} = 0.$$

D'autre part, par (SEID), (en posant $Z = \det\Gamma[X]\chi_B$) :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}} \det\Gamma[X]\chi_B(\chi_A(\psi(X_n)) - \chi_A(\psi(X)))\} = 0.$$

Cependant, $0 = \mathbb{E}\{\det\Gamma[X_n]\chi_B\,\chi_A(\psi(X_n))\}$, car la propriété (EID) est vraie pour les variables X_n, on en déduit :

$$\mathbb{E}\{\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}} \det\Gamma[X]\chi_B\chi_A(\psi(X))\} = 0.$$

Il suffit alors de faire grossir les ensembles B choisis, pour obtenir à la limite que :

$$\mathbb{E}\{\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}} \det\Gamma[X]\chi_A(\psi(X))\} = 0.$$

$\square$

Remarque 1. *On a choisi la classe $\mathbb{D}^{2,2}$ pour effectuer la démonstration, mais cela n'a rien d'indispensable. Il suffit de choisir une classe de variables suffisamment régulières pour pouvoir effectuer des intégrations par parties, et qui soit dense dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$.*

Remarque 2. *Dans la proposition précédente, on prouve que pour une structure S fixée, la propriété (SEID) entraîne la propriété (EID). Il est néanmoins beaucoup plus simple de prouver que si toutes les structures satisfont (SEID) alors toutes les structures satisfont (EID). Pour ce faire, on peut convoler le p-uplet $(X_1,\cdots,X_p)$ par des variables uniformes indépendantes $X_n = X + \frac{1}{n}(U_1\cdots,U_p)$, dans ce cas le raisonnement s'effecture dans la structure d'erreur produit $S\times H^1[0,1]^p$.*

Nous savons que la propriété (EID) a été prouvée vraie dans le cas unidimensionnel (p=1). Dans le théorème suivant, nous démontrons que (SEID) est également vraie pour toute structure d'erreur S et pour $p=1$. C'est à dire pour des variables à valeurs réelles.

Théorème 1. *(SEID) pour $p=1$.*

Soient X et X_n des variables aléatoires dans $\mathbb{D}$ telles que $\lim_{n\to\infty}\|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Fixons une suite quelconque de fonctions continues ϕ_n telles que $\|\phi_n\|_\infty \le 1$ et Z un élément quelconque de L^2. Sous ces hypothèses :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = 0.$$

Démonstration.

La suite $\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{P})$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers un élément W de $L^\infty(\mathbb{P})$. Ainsi,quel que soit Y dans $L^1(\mathbb{P})$ (quitte à renuméroter) :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Y\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\} = \mathbb{E}\{YW\}.$$

L'objectif principal de la preuve est donc d'établir que $W = 0$. Notons $\Psi_n(x) = \displaystyle\int_0^x \phi_n(t)dt$. Fixons enfin U dans le domaine $\mathcal{D}(A)$ du générateur.

Ψ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-Lipschitzienne. Nous pouvons appliquer la propriété de calcul fonctionnel.

$$\begin{aligned}\Gamma[\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X),U] &= \phi_n(X_n)\Gamma[X_n,U]-\phi_n(X)\Gamma[X,U]\\ &= (\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\Gamma[X,U]+\phi_n(X_n)\Gamma[X-X_n,U].\end{aligned}$$

Prenons l'espérance des égalités précédentes. Pour Z dans $\mathbb{D}\cap L^\infty$, on a l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\Gamma[\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X),U]Z\} &= -\mathbb{E}\{Z(\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X))A[U]\}\\ &\quad +\mathbb{E}\{(\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X))\Gamma[Z,U]\}\\ &= \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\Gamma[X,U]\}\\ &\quad +\mathbb{E}\{Z\phi_n(X_n)\Gamma[X-X_n,U]\}.\end{aligned}$$

D'une part,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X))A[U]\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{(\Psi_n(X_n)-\Psi_n(X))\Gamma[Z,U]\} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\phi_n(X_n)\Gamma[X-X_n,U]\} = 0.$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\Gamma[X,U]\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}\Gamma[X,U]\}\\ &= \mathbb{E}\{WZ\Gamma[X,U]\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout U dans $\mathcal{D}(A)$ et Z dans $\mathbb{D}\cap L^\infty$, on a $\mathbb{E}\{WZ\Gamma[X,U]\} = 0$.

Finalement, $\mathbb{E}\{W^2\Gamma[X,X]\} = 0$, donc $W\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}} = 0$. Or on a clairement $W\chi_{\{\Gamma[X]=0\}} = 0$ (par construction). Ainsi $W = 0$. Autrement dit, la seule valeur d'adhérence faible est 0, ce qui achève la démonstration. □

Une conséquence intéressante de la propriété précédente est que la convergence en norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ est préservée par composition avec des applications Lipschitziennes.

Corollaire 1. *Convergence pour $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ et fonction Lipschitzienne.*

Soient X_n et X des éléments de $\mathbb{D}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Et soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, K-Lipschitzienne. Alors $\lim_{n\to\infty} \|F(X_n) - F(X)\|_{\mathbb{D}} = 0$.

Démonstration.

F est K-Lipschitzienne, nous avons déjà $\lim_{n\to\infty} \|F(X_n) - F(X)\|_{L^2(\mathbb{P})} = 0$.
Il reste à prouver que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}[F(X_n) - F(X)] = 0$.

En utilisant le calcul fonctionnel de classe Lipschitzien :

$\Gamma[F(X_n)-F(X)] = (F'(X_n))^2\Gamma[X_n]+(F'(X))^2\Gamma[X]-2F'(X)F'(X_n)\Gamma[X,X_n]$.

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\Gamma[X,X_n] - \Gamma[X,X]|\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\Gamma[X_n,X_n] - \Gamma[X,X]|\} = 0.$$

Ainsi $\mathcal{E}[F(X_n) - F(X)]$ a même limite que $\mathbb{E}\{\Gamma[X,X](F'(X_n) - F'(X))^2\}$.

Or d'après la propriété (SEID),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X,X](F'(X_n))^2\} = \mathbb{E}\{\Gamma[X,X](F'(X))^2\},$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X,X]F'(X_n)F'(X)\} = \mathbb{E}\{\Gamma[X,X](F'(X))^2\}.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X,X](F'(X_n) - F'(X))^2\} = 0$. □

Etudions maintenant la stabilité de la propriété (SEID) vis à vis de l'opération produit infini. On sait que si S_i est une famille de structures d'erreurs telle que pour tout n, $\prod_{i=1}^{n} S_i$ satisfait (EID) alors $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$ satisfait encore (EID). Cette propriété est d'une grande importance car elle permet d'obtenir (EID) sur des objet de dimension "infinie" tels que les solutions d'équations différentielles stochastiques. Dans la proposition suivante nous montrons qu'il en est de même pour (SEID). Nous renvoyons à [6] ou [2] pour les définitions des opérations "produit" et "image" sur les structures.

Proposition 3. *Stabilité de (SEID) par produit infini.*

Soit S_i une famille de structures d'erreur telles que $\prod_{i=1}^{n} S_i$ satisfait (SEID) pour tout rang n, alors $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$ vérifie (SEID).

Démonstration.

Soient $X = (X_1, \cdot, X_p)$ et $X_n = (X_1^{(n)}, \cdot, X_p^{(n)})$ avec $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Soit ϕ_n une suite de fonction de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telles que $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$ et soit $Z \in L^2(\mathbb{P})$. Rappelons, que par définition du produit de structures, $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_i$. Dans les calculs qui suivent, $\mathbb{E}_i^j$ désignera l'espérance par rapport à la mesure $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=i}^{j} \mathbb{P}_k$.

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}}\} - \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}}\}\right| \\
\leq\ & 2\,\mathbb{E}\{|Z|\,|\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}}|\} \\
\leq\ & K\,\mathbb{E}\{(\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}})^2\}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim_{q\to\infty} \mathbb{E}\{(\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}})^2\} = 0$, par convergence monotone. Car $\lim_{q\to\infty} \uparrow \Gamma_q[X] = \Gamma[X]$. (Il s'agit ici de l'ordre naturel sur les matrices symétriques).

A partir de maintenant on fixe un entier q tel que les quantités ci-dessus soient proches à $\epsilon > 0$ près.
Il nous suffit alors de démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

Mais par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}}\} = \mathbb{E}_{q+1}^\infty\{\mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det \Gamma[X]\neq 0\}}\}\}.$$

Or par définition du produit infini de structures d'erreurs, $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as, $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_q) \longrightarrow X(\omega, \omega_{q+1}, \cdots,) \in \mathbb{D}_q = \mathbb{D}(S_1 \times \cdots \times S_q)$.

De plus, nous avons par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{q+1}^{\infty}\{\|X_n - X\|_{\mathbb{D}_q}^2\} = 0$. Par le théorème de Riesz-Fisher de complétude des espaces L^p, on peut trouver une sous-suite k_n telle que $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as, $\lim_{n\to\infty} \|X_{k_n} - X\|_{\mathbb{D}_q}(\omega_{q+1}, \cdots) = 0$.

Par (SEID), $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_{k_n}(X_{k_n}) - \phi_{k_n}(X))\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

Par convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{q+1}^{\infty}\mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_{k_n}(X_{k_n}) - \phi_{k_n}(X))\chi_{\{\det \Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

□

Remarque 3. *Néanmoins, la propriété (SEID) comme la propriété (EID) ne passent pas aux "images" de structures d'erreur. La difficulté principale résidant dans le fait que si $\Gamma[X](\omega)$ est non dégénérée alors $\mathbb{E}\{\Gamma[X]|X\}(\omega)$ peut être dégénérée. Toutefois, comme pour (EID) on peut démontrer que (SEID) passe aux images injectives. C'est à dire que si S satisfait (SEID) et $X = (X_1, \cdots, X_p)$ est un p-uplet dont la matrice de covariance $\Gamma[X]$ est presque sûrement non dégénérée alors, l'image de S par X est une structure d'erreur sur $\mathbb{R}^p$ qui satisfait (SEID).*

Voyons maintenant une application de (SEID) pour les variables aléatoires unidimensionnelles. Rappelons qu'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure de Rajchman si et seulement si $\lim_{\|\xi\|\to\infty} \hat{\mu}(\xi) = 0$.

Théorème 2. *Les variables non dégénérées de $\mathbb{D}^p$ ont une loi de Rajchman.*

Soient $X = (X_1, \cdots, X_p)$ dans le domaine $\mathbb{D}$ d'une structure d'erreur S, et dont $\Gamma[X] = (\Gamma[X_i, X_j])_{i,j}$ est presque sûrement non dégénérée.
Dans ce cas, $\mathbb{P}_X$: la loi de X, est une mesure de Rajchman sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration.

Soit $X = (X_1, \cdots, X_p)$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit $U =$

$(U_1, \cdots, U_p)$ les applications coordonnées de la structure d'erreur $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$, en particulier U a pour loi la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^p$. On définit alors $X_n = X + \frac{1}{n}U$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\|_{\mathbb{D}} = 0.$$

Ici $\mathbb{D}$ représente le domaine de la structure produit $S \times \mathcal{H}^1([0,1]^p)$. Soit $\xi_n = (\xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_p^{(n)}) \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathbb{E}\{e^{i\xi_n \cdot X_n} - e^{i\xi_n \cdot X}\} = \mathbb{E}\{e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\cdot X_n} - e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\}}\cdot X}\}.$$

Quitte à renuméroter, et par compacité, on peut supposer que $\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}$ converge vers $\frac{\xi}{\|\xi\|}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n - \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X\|_{\mathbb{D}} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X - \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X\|_{\mathbb{D}} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} = 0.$$

Pour les deux dernières équations, on a appliqué (SEID) à la suite de fonctions $g_n(x) = e^{i\|\xi_n\|x}$, grâce au fait que la variable limite $\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X$ est non dégénérée. Vérifions juste ce dernier point, $\Gamma[\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X] = {}^t(\frac{\xi}{\|\xi\|})\Gamma[X](\frac{\xi}{\|\xi\|})$. Or cette dernière quantité est toujours non nulle, eu égard au fait que $\Gamma[X]$ est par hypothèse une matrice symétrique définie positive. Enfin, pour conclure, il faut remarquer que :

$$\mathbb{E}\{e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\cdot X_n} - e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\}}\cdot X}\} = \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} - \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\}.$$

Ceci assure donc que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{e^{i\xi_n \cdot X_n} - e^{i\xi_n \cdot X}\} = 0.$$

Ce qui peut s'écrire plus explicitement,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^p} |\hat{\mathbb{P}}_{X_n}(\xi) - \hat{\mathbb{P}}_X(\xi)| = 0.$$

Autrement dit, la convergence dans le domaine entraîne la convergence uniforme des transformées de Fourier des lois.
Pour conclure, il suffit de remarquer que par construction la loi de X_n possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et est donc de Rajchman. La propriété précédente permet d'affirmer que $\mathbb{P}_X$ est aussi une mesure de Rajchman. $\square$

2 Cas particulier de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener

Dans cette partie, nous démontrons une version plus faible (nécessitant des hypothèses d'intégrabilité supplémentaires) de la propriété (SEID) pour la structure d'erreur uniforme $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$ puis nous déduirons une propriété analogue pour la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0, Id_p), \mathbb{R}^p)$.

Théorème 3. *(SEID) Mesure de lebesgue*

Soit $f_n = (f_1^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$ une suite de $\mathcal{H}^1([0,1]^q)$ qui converge vers $f = (f_1, \cdots, f_p)$ pour la norme de $\mathcal{H}^1$.
Nous ferons l'hypothèse d'intégrabilité supplémentaire que la suite ∇f_n est bornée dans $L^p(d\lambda_q)$.
Dans ce cas, nous avons la propriété (SEID), à savoir pour toute suite ϕ_n de fonctions continues ($\|\phi_n\|_\infty \leq 1$) et toute fonction g dans $L^2(d\lambda_q)$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x)))\chi_{\{\det \Gamma[f]\neq 0\}}(x)dx_1 \cdots dx_q = 0.$$

Avant de rentrer dans le détail de la preuve générale, et afin de fixer les idées, nous démontrons ici le cas particulier $q = p = 2$. Soient $F_n = (f_n, g_n)$ dans $\mathcal{H}^1([0,1]^2)$ et convergeant pour la norme $\mathcal{H}^1$ vers $F = (f, g)$. Soit ψ_n une suite de fonctions quelconque de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec $\|\psi_n\|_\infty \leq 1$. Nous souhaitons démontrer que pour toute fonction h dans $L^2([0,1]^2)$ on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} h(\psi_n(F_n) - \psi_n(F))\chi_{\{\det \Gamma[F]\neq 0\}}dxdy = 0.$$

Pour ce faire, nous allons introduire $\Psi_n(x,y) = \int_0^x \psi_n(t,y)dt$ une primitive par rapport à la première variable de ψ_n. La règle de différentiation en chaîne assure donc que :

$$\partial_1[\Psi_n(F_n)] = \psi_n(F_n)\partial_1 f_n + \partial_2[\Psi_n](F_n)\partial_1 g_n,$$

$$\partial_2[\Psi_n(F_n)] = \psi_n(F_n)\partial_1 f_n + \partial_2[\Psi_n](F_n)\partial_2 g_n.$$

Nous souhaitons éliminer le terme $\partial_2[\Psi_n]$ car nous n'avons aucun contrôle sur ce terme. On procède par combinaison linéaire, ainsi :

$$\partial_1[\Psi_n(F_n)]\partial_2 g_n - \partial_2[\Psi_n(F_n)]\partial_1 g_n = \psi_n(F_n)(\partial_1 f_n \partial_2 g_n - \partial_1 g_n \partial_1 f_n).$$

Ou autrement écrit , $\{\Psi_n(F_n), g_n\} = \psi_n(F_n)\{f_n, g_n\}$ avec $\{u, v\} = \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v$ le crochet de Poisson.

Si l'on introduit maintenant $H_n = (f, g_n)$, par simple application des calculs précédents on obtient, pour une fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R})$:

$$\phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\} = \phi\Big(\psi_n(F_n)\{f_n, g_n\} - \psi_n(H_n)\{f, g_n\}\Big).$$

Mais par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} |\{f_n, g_n\} - \{f, g\}| dxdy = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n)\{f_n, g_n\} - \psi_n(H_n)\{f, g_n\}\big)dxdy - \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy - \int_{[0,1]^2} \phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\}dxdy = 0.$$

Mais par intégration par parties, on a :

$$\int_{[0,1]^2} \phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\}dxdy = -\int_{[0,1]^2} (\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n))\{\phi, g_n\}dxdy.$$

Or par construction $\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n) = \int_0^{f_n - f} \psi_n(t, g_n)dt$.

Et donc, $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} (\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n))\{\phi, g_n\}dxdy = 0$.

Nous en déduisons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy = 0.$$

Il suffit pour conclure de choisir des fonctions test ϕ telles que :

$$\int_{[0,1]^2} |\phi\{f,g\} - h\chi_{\{\det\Gamma[F]\neq 0\}}|dxdy \leq \epsilon.$$

Cela est possible car $\det\Gamma[F] = \{f,g\}^2$.

Il reste à dire que $\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g)$ se décompose de la façon suivante :

$$\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g) = (\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g_n)) + (\psi_n(f, g_n) - \psi_n(f, g)).$$

La démonstration précédente ne traite que le terme $\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g_n)$. Pour traiter le terme $(\psi_n(f, g_n) - \psi_n(f, g))$ il faut procéder de façon tout à fait analogue en considérant cette fois ci, $\theta_n(x, y) = \int_0^y \psi_n(x, s)ds$, la primitive de ψ_n respectivement à la seconde variable.
Passons au cas général.

Démonstration.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite de fonctions ϕ_n considérée est de classe $\mathcal{C}^1$. Le passage aux fonctions continues se fera alors par densité, étant donné qu'on a de l'uniformité sur les fonctions ϕ_n que l'on choisit.

Définissons $\Psi_n(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \int_0^{x_1} \phi_n(t, x_2, \cdots, x_p)dx_1 \cdots dx_p$.

Pour tout $k \in \{1, \cdots, q\}$:

$$\partial_k[\Psi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})] = \phi_n(f_n)\partial_k f_1^{(n)} + \sum_{j=2}^{p} \partial_j[\Psi_n](f_n)\partial_k f_j.$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n(f_n)] \\ \partial_2[\Psi_n(f_n)] \\ \vdots \\ \partial_q[\Psi_n(f_n)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1^{(n)} & \partial_1 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_1 f_p^{(n)} \\ \partial_2 f_1^{(n)} & \partial_2 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_2 f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_q f_1^{(n)} & \partial_q f_2^{(n)} & \cdots & \partial_q f_p^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n](f_n) \\ \partial_2[\Psi_n](f_n) \\ \vdots \\ \partial_p[\Psi_n](f_n) \end{pmatrix}.$$

A partir de maintenant, on fixe $I = \{i_1, \cdots, i_p\}$ un sous-ensemble d'indices de $\{1, \cdots, q\}$.

Nous avons donc le système suivant qui est l'extraction du système précédent pour l'ensemble des indices dans I :

$$\begin{pmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n)] \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n)] \\ \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{i_1} f_1^{(n)} & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} f_1^{(n)} & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} f_1^{(n)} & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n](f_n) \\ \partial_2[\Psi_n](f_n) \\ \vdots \\ \partial_p[\Psi_n](f_n) \end{pmatrix}.$$

Les formules de Cramer assurent que :

$$\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) = \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix}.$$

On a noté :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1^{(n)} & \partial_1 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_1 f_p^{(n)} \\ \partial_2 f_1^{(n)} & \partial_2 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_2 f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_q f_1^{(n)} & \partial_q f_2^{(n)} & \cdots & \partial_q f_p^{(n)} \end{pmatrix} ;\ A_I^{(n)} = \begin{pmatrix} \partial_{i_1} f_1^{(n)} & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} f_1^{(n)} & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} f_1^{(n)} & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Grâce aux calculs algébriques précédents, nous pouvons commencer la preuve du théorème. Pour ce faire, nous allons introduire Z une limite faible de la suite $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))$.

Autrement dit, et quitte à renuméroter la suite on a pour tout w dans $L^1(d\lambda_q)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} w(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))d\lambda_q = \int_{[0,1]^q} wZ d\lambda_q.$$

Il suffit alors de prouver que $Z\chi_{\{\det A\neq 0\}} = 0$. Rappelons à cet effet que puisque $\det \Gamma[f] = (\det A)^2$, $\{\det A \neq 0\} = \{\det \Gamma[f] \neq 0\}$.
Remarquons également que nous considérons $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))$ au lieu de $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, \cdots, f_p))$. Mais cela sera suffisant, il suffit en effet de considérer la décomposition suivante, et d'appliquer

la méthode à chaque terme de la décomposition ci-dessous.

$$\begin{aligned}
&\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, \cdots, f_p) = \phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})\\
&+\phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, f_3^{(n)} \cdots, f_p^{(n)})\\
&+\phi_n(f_1, f_2, f_3^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, f_3, f_4^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})\\
&\vdots\\
&+\phi(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f_p^{(n)}) - \phi(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f_p).
\end{aligned}$$

De ce qui précède on tire que (avec $g_n = (f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$) et $B_I^{(n)} = mat((\partial_{i_k} g_l)_{k,l}))$:

$$\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n) = \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons supposé également que ∇f_n est bornée dans $L^{(p)}$ et que f_n converge vers f dans $\mathcal{H}^1$. Cela permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} |\det(A_I^{(n)}) - \det(A_I)| d\lambda_q = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} |\det(B_I^{(n)}) - \det(A_I)| d\lambda_q = 0.$$

Par suite, pour toute fonction test w de $\mathcal{C}_c^\infty([0,1]^q, \mathbb{R})$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} (\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n)) w d\lambda_p = \int_{[0,1]^q} Z w \det A_I d\lambda_q.$$

Ce que l'on va montrer, c'est que pour toute fonction test w, $\int_{[0,1]^q} Z w \det A_I d\lambda_q = 0$.

Il suffit pour ça de revenir à l'expression avec les déterminants :

$$\int_{[0,1]^q} (\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n))w =$$

$$\int_{[0,1]^q} w \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix} d\lambda_q =$$

$$-\int_{[0,1]^q} (\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)) \begin{vmatrix} \partial_{i_1} w & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} w & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} w & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix} d\lambda_q \leq$$

$$C\|\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)\|_{L^2(\lambda_q)} \leq C\|f_n - g_n\|_{L^2(\lambda_q)}.$$

On a donc bien prouvé, que pour toute fonction test w, $\int_{[0,1]^q} Zw \det A_I d\lambda_q = 0$, ou encore $Z \det A_I = 0$. Le raisonnement étant valable pour tout sous-ensemble d'indice I, on a bien $Z \det(A) = 0$. □

Remarque 4. *Le point clé de la démonstration précédente est le résultat suivant. Pour $w_1, w_2, \cdots, w_{p+1}$ de classe $\mathcal{C}_c^\infty([0,1]^q, \mathbb{R})$ on a la formule d'intégration par partie suivante qui découle essentiellement du lemme de Schwartz $\partial_{(i,j)} = \partial_{(j,i)}$. Ce lemme peut ensuite s'étendre par densité à des fonctions moins régulières telles que celles de $\mathcal{W}^{1,p}$, pourvu qu'il n'y ait pas de termes de bord. Il n'y a pas de termes de bord, si l'une des fonctions w_i est à support compact.*

$$\int_{[0,1]^q} w_{p+1} \begin{vmatrix} \partial_1 w_1 & \partial_1 w_2 & \cdots & \partial_1 w_p \\ \partial_2 w_1 & \partial_2 w_2 & \cdots & \partial_2 w_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_p w_1 & \partial_p w_2 & \cdots & \partial_p w_p \end{vmatrix} d\lambda_q = -\int_{[0,1]^q} w_1 \begin{vmatrix} \partial_1 w_{p+1} & \partial_1 w_2 & \cdots & \partial_1 w_p \\ \partial_2 w_{p+1} & \partial_2 w_2 & \cdots & \partial_2 w_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_p w_{p+1} & \partial_p w_2 & \cdots & \partial_p w_p \end{vmatrix} d\lambda_q.$$

Cette formule est par essence multilinéaire. Pour la démontrer, on peut la tester facilement sur les fonction exponentielles $e^{i<\alpha,x>}$ puis l'étendre par approximation de Fourier par exemple.

Examinons le cas de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck multimensionnelle : $S_{O-U} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1), \mathcal{H}(\mathcal{N}(0,1)), \Gamma[f] = (f')^2)^q$. On a alors l'analogue du théorème précédent à savoir :

Théorème 4. *(SEID) Ornstein-Uhlenbeck*

Soit $f_n = (f_1^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$ une suite de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^q, \mathcal{N}(0, I_q))$ qui converge vers $f = (f_1, \cdots, f_p)$ pour la norme de $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0, I_q))$.
Nous ferons l'hypothèse d'intégrabilité supplémentaire que la suite ∇f_n est bornée dans $L^p(\mathcal{N}(0, I_q))$.
Dans ce cas, nous avons la propriété (SEID), à savoir pour toute suite ϕ_n de fonctions continues ($\|\phi_n\|_\infty \leq 1$) et toute fonction g dans $L^2(\mathcal{N}(0, I_q))$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x)))\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}}(x) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} dx_1 \cdots dx_q = 0.$$

Démonstration.

On peut se ramener à la mesure de Lebesgue. On commence par fixer un réel $M > 0$ tel que :

$$|\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{\{|x\|_1 \geq M\}} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x)))\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}}(x) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} dx_1 \cdots dx_q| \leq \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{\{|x\|_1 \geq M\}} g(x) d\mathcal{N}(0, I_q) \leq \epsilon.$$

Il suffit alors de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-M,M]^q} \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x)))\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}}(x) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} dx_1 \cdots dx_q = 0.$$

Or il est clair que les fonctions f_n restreintes à $[-M, M]^q$ sont dans $\mathcal{H}^1([-M, M]^q, d\lambda_q)$. Enfin comme la densité de la mesure gaussienne ne s'annule pas et que ∇f_n est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^q, \mathcal{N}(0, I_q))$ alors ∇f_n est également bornée dans $L^p([-M, M]^q, d\lambda_q)$. On peut donc appliquer le théorème 3. □

Voyons maintenant quelques applications des théorèmes précédents.

Corollaire 2. *Itération aléatoire de fonctions dépendant d'un paramètre*

Soit $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On fait les hypothèses suivantes.

1. *il existe $k \in [0,1[$ tel que*

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{y\in[0,1],\, z\in[a,b]} |F(x,y,z) - F(x',y,z)| \leq k|x-x'|.$$

2. *il existe $C > 0$ tel que :*

$$\sup_{z\in[a,b]} |F(x,y,z) - F(x',y',z')| \leq C|x-x'| + C|y-y'|.$$

3. *$(x,y,z) \longrightarrow F(x,y,z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
4. *Pour tout z, pour tout x, l'application : $y \longrightarrow F(x,y,z)$ n'est pas constante et $\partial_1 F(x,y,z) \neq 0$.*

On considère la chaîne de Markov $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}, z)$, où les U_i est une suite indépendante équidistribuée de lois uniformes sur $[0,1]$. On a les conclusions suivantes.

1. *Pour toute valeur du paramètre z, X_n converge en loi vers une mesure de proba μ_z.*
2. $\lim\limits_{z\to z'} \|\mu_z - \mu'_z\|_{v-t} = 0.$

Démonstration.

Considérons la structure d'erreur produit infini suivante $\mathcal{H}^1([0,1])^{\mathbb{N}}$. Les tirages U_i peuvent être assimiliés aux coordonnées de cette structure d'erreur. Soit $f_i(x) = F(x, U_i, z)$, $X_n = f_n \circ \cdots \circ f_1(x_0)$. Ainsi X_n a même loi que $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0)$. En inversant ainsi l'ordre des itérations, nous allons démontrer que $Z_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots f_n(x_0)$ converge dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ vers une variable aléatoire de loi μ_z.

$$\begin{aligned}
&\|Z_{n+1} - Z_n\|_{L^2} \leq Ck^n,\\
&\Gamma[Z_n] = \partial_2 F(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0), U_1, z)^2 + \cdots +\\
&\partial_1 F(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0), U_1, z)^2 \cdots \partial_1 F(f_n(x_0), U_{n-1}, z)^2 \partial_2 F(x_0, U_n, z)^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, Z_n converge dans L^2 vers Z_∞ et $\mathcal{E}[Z_n]$ est bornée. Par suite $Z_\infty \in \mathbb{D}$. Nous allons à présent démontrer que $\lim\limits_{z'\to z} \|Z_\infty(z') - Z_\infty(z)\|_{\mathbb{D}} = 0$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que :

$$\sup_{z\in[a,b]} \|Z_\infty^z - Z_n^z\|_{\mathbb{D}} \leq \epsilon.$$

Il est donc suffisant de prouver que pour tout n :

$$\lim_{z\to z'} \|Z_n^z - Z_n^{z'}\|_{\mathbb{D}} = 0.$$

Cela découle directement de l'hypothèse 3.

Il reste à étudier la non dégénérescence de $\Gamma[Z_\infty]$. On a la formule suivante :

$\Gamma[Z_\infty^z] = \partial_2 F(Z_2^\infty, U_1, z)^2 + \cdots + \partial_1 F(Z_2^\infty, U_1, z)^2 \cdots \partial_1 F(Z_n^\infty, U_{n-1}, z)^2 \partial_2 F(Z_{n+1}^\infty, U_n, z)^2 + \cdots$.

Où l'on a noté $Z_p^\infty = \lim_{n\to\infty} f_p \circ f_{p+1} \circ \cdots f_n(x)$.

En utilisant l'hypothèse 4, on obtient que $\Gamma[Z_\infty](\omega) = 0$ si et seulement si pour tout $p \geq 1$, $\partial_2 F(Z_{p+1}^\infty, U_p, z)(\omega) = 0$.
Introduisons l'événement $\mathcal{A}_n = \{\forall p \geq n,\ \partial_2 F(Z_{p+1}^\infty, U_p, z)(\omega) = 0\}$. Ainsi $\bigcap_n \mathcal{A}_n$ est un événement de la tribu asymptotique.
On en déduit que $\mathbb{P}\{\Gamma[Z_\infty] = 0\} \in \{0,1\}$. Et $\mathbb{P}\{\Gamma[Z_\infty] = 0\} = 1$ si et seulement si, $\mu_z \otimes d\lambda_y \partial_2 F(x,y,z) = 0$, ce qui va impliquer que pour certaines valeurs de x, la fonction $y \to F(x,y,z)$ est constante.
Pour achever la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème 1, car les variables Z_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque 5. *Le résultat précédent se généralise à la dimension supérieure. Il faut toutefois modifier les conditions de non dégénérescence sur F dans l'esprit du chapitre de cette thèse sur l'absolue continuité des mesures stationnaires.*

Par des méthodes issues du calcul de Malliavin et sous-condition de Hörmander on sait que la famille des probabilités de transition $p_t(x,y)$ d'une diffusion est régulière en (x,y) (voir [8] pages 125-135). Cela permet d'étudier facilement la dépendance des lois aux conditions initiales.
Si les coefficients fonctionnels ne sont pas assez réguliers (disons de classe $\mathcal{C}^1$) une telle approche est souvent impossible. La condition de Hörmander nécessite souvent beaucoup de régularité sur les coefficients. La proposition suivante permet d'étudier la question en toute généralité. Nous n'avons pas réussi à abaisser la régularité à Lipschitzien.

Corollaire 3. *Dépendance des lois de solutions de S.D.E à la condition initiale.*

Considérons l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x, s)dt + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X_s^x, s)dW_s^j. \tag{1}$$

Nous supposons les conditions suivantes sur les coefficients B et σ :

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \|\sigma_j(x,t) - \sigma_j(y,t)\| + \|B(x,t) - B(y,t)\| \leq K\|x-y\|$; $x, y \in \mathbb{R}^m,\ t \in [0,T]$.
2. $t \to B(0,t),\ \ t \to \sigma_j(0,t)$ *sont bornées sur* $[0,T]$.
3. *Pour tout réel* t, $x \to \sigma(x,t)$ *et* $x \to B(x,t)$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas, nous avons les conclusions suivantes.

1. *Pour tout* x *dans* $\mathbb{R}^m$, *pour tout* t *dans* $[0,T]$ *et tout* $p \geq 2$, $X_t^x \in \mathbb{D}^{1,p}$.

   De plus, il existe r *tel que* $\displaystyle\sup_{y \in B(x,r)} \|X_t^y\|_{\mathbb{D}^{1,p}} < \infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to y} \|X_t^x - X_t^y\|_{\mathbb{D}} = 0$.
3. *On a la propriété (SEID), à savoir pour toute suite de fonctions* ϕ_n *continues sur* $\mathbb{R}^m$ *telle que* $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$, *pour toute fonction arbitraire* Z *dans* $L^2(\mathbb{P})$ *et pour toute suite* y_n *convergeant vers* y :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{\{\det \Gamma[X_t^y] \neq 0\}}(\phi_n(X_t^{y_n}) - \phi_n(X_t^y))\} = 0.$$

4. *Si par exemple* $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_t^y] \neq 0\} = 1$, *alors la loi de* X_t^x *converge en variation totale vers la loi de* X_y^t *quand* x *tend vers* y.

Démonstration.

Procédons point par point.

1. Cette propriété qui se démontre par un raisonnement d'itération de Picard est faite dans le livre [8]. Il s'agit du théorème 2.2.1 à la page 119. Pour cela, l'hypothèse 3 est inutile.
2. Cette propriété découle du théorème de point fixe à paramètre suivant.

   Soit $(\mathcal{K}, d)$ un espace métrique complet, et U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $F : \mathcal{K} \times U \to \mathcal{K}$ une application continue telle que pour tout x dans U, il existe $r_x > 0$ et $\alpha_x \in [0,1[$ avec :

$$\sup_{y \in B(x,r_x)} \sup_{a,b \in \mathcal{K}} d(F(a,y), F(b,y)) \leq \alpha_x d(a,b).$$

   Alors pour tout x dans U, il existe un unique point fixe a_x dans $\mathcal{K}$ pour l'application $F(\cdot, x)$. De plus l'application $x \to a_x$ est continue.

Rappelons que pour démontrer le premier point, on étudie la suite d'itérations de Picard :

$$X_0(t) = x$$
$$X_{n+1}(t) = x + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_j(s, X_n(s))dW_s^j + \int_0^t B(s, X_n(s))ds.$$

Ce qui s'écrit $X_{n+1} = T(X_n, x)$. L'espace de Banach considéré est :

$$E = \{\phi(s,\omega) \in \mathbb{D} \mid \sup_{s\in[0,T]} \|\phi(x)\|_{\mathbb{D}} < \infty\}.$$

Il suffit de vérifier que T est continue sur $E \times \mathbb{R}^m$. Cela provient essentiellement de la formule suivante :

$$^\sharp T\phi(t) = \int_0^t \partial_2 B(s, \phi(s))^\sharp\phi(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \partial_2\sigma_j(s, \phi(s))^\sharp\phi(s)dW_s^j + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(s, \phi(s))d\hat{W}_s^j.$$

$\hat{W}$ représentant un mouvement brownien indépendant de W. Il s'agit là du choix d'un gradient particulier qui est l'opérateur $\sharp$. Rappelons brièvement que cet opérateur est défini par la formule (valable sur les fonctionnelles régulières du Brownien) :

$$^\sharp F(W_{h_1}, \cdots, W_{h_p}) = \sum_{k=1}^p \partial_k F(W_{h_1}, \cdots, W_{h_p}) \int h_k d\hat{W}.$$

Nous pouvons déduire de cette formule (par les théorèmes classiques de convergence sous les intégrales) que si ϕ_n tend vers ϕ pour la norme de E alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}\{|^\sharp T\phi_n(t) - {}^\sharp T\phi(t)|^2\} = 0.$$

Puis l'on a également

$$\lim_{n\to\infty, x\to y} \mathbb{E}\{|T(\phi_n, x) - T(\phi, y)|^2\} = 0.$$

L'hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ est alors utilisée pour passer à la limite dans les dérivées partielles des fonctions B et ϕ.

3. Pour démontrer ce point là, il faut utiliser conjointement le théorème 4 et la proposition 3.

D'après le point 2, on sait que $\lim_{x \to y} \|X_t^x - X_t^y\|_{\mathbb{D}} = 0$. Mais on sait que $\mathbb{E}\{\Gamma[X_t^x]^p\}$ est bornée sur un voisinage de x, pour tout $p \geq 2$. Cette hypothèse de contrôle de la norme p du gradient nous permet d'appliquer le théorème 4.

4. Le point 4 est un corollaire du point 3 et de la proposition 1.

$\square$

Références

[1] N. Bouleau. Décomposition de l'énergie par niveau de potentiel. *Théorie du Potentiel*, pages 149–172, 1984.

[2] N. Bouleau. *Error calculus for finance and physics : The language of Dirichlet forms.* de Gruyter, 2003.

[3] N. Bouleau and L. Denis. Application of the lent particle method to poisson-driven sdes. *Probability Theory and Related Fields*, pages 1–31, 2009.

[4] N. Bouleau and L. Denis. Energy image density property and the lent particle method for poisson measures. *Journal of Functional Analysis*, 257(4) :1144–1174, 2009.

[5] N. Bouleau and F. Hirsch. Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques. *Séminaire de Probabilités XX 1984/85*, pages 131–161, 1986.

[6] N. Bouleau and F. Hirsch. Dirichlet forms and analysis on Wiener space, vol. 14 of de Gruyter Studies in Mathematics, 1991.

[7] A. Coquio. Formes de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson et applications aux equations différentielles stochastiques. *Ann. Inst. Henri Poincarré*, 19(1) :1–36, 1993.

[8] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Springer, 1995.